

Artigo

Por Sérgio Toledo Sobral e Patrício Munhoz Rojas*

Anexo 1 – A Lei de Faraday aplicada a uma espira condutora aberta

1) O conteúdo essencial da lei de Faraday-Maxwell é que o campo elétrico tem uma “componente conservativa” (representada pelo gradiente do potencial elétrico escalar “ Φ ”) e outra “componente não conservativa” (representada pela derivada parcial com respeito ao tempo do potencial magnético vetor “ \vec{A} ”).

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \\ FEM &\equiv \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \quad ; \\ &= -\frac{d}{dt} \iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} \equiv -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

2) Isto implica que a integral de linha do campo elétrico, numa trajetória entre um ponto inicial “i” e um ponto final “f”, a qual é denominada de “tensão nessa trajetória” ou “Vif(traj)”, tem também duas componentes:

Uma primeira componente independente da trajetória, que depende unicamente do ponto inicial e do ponto final, que é igual a ($\Phi(i) - \Phi(f)$) e que é denominada “diferença de potencial entre os pontos terminais” ou d.d.p.; e

Uma segunda componente que depende da trajetória, através do valor do potencial magnético existente sobre a trajetória, ou seja,

$$V_{if(traj)} \equiv \int_{i(traj)}^f \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\phi(i) - \phi(f)) - \int_{i(traj)}^f \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l}$$

3) Por razões históricas e talvez práticas, o conceito do item 2 é colocado de maneira diferente. A d.d.p. é dividida em duas componentes ficando:

$$\phi(i) - \phi(f) = V_{if(traj)} + \int_{i(traj)}^f \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{l} \equiv V_{if(traj)} + U_{if(traj)}$$

A primeira componente “Vif (traj)” é chamada, como já vimos, de “tensão ao longo da trajetória” e a segunda componente “Uif (traj)” é chamada de “tensão induzida ao longo da trajetória”.

No caso particular de uma trajetória consistente de material condutor, a tensão “Vif(traj)” que, utilizando a lei de Ohm, é igual a RI, usualmente é chamada de “parte resistiva da d.d.p.” e a tensão induzida “Uif(traj)” usualmente é chamada de “parte indutiva da d.d.p.”;

4) Como a utilização mais importante e mais básica destes conceitos é em teoria de circuitos (que são trajetórias fechadas), a integral de linha do campo elétrico em uma trajetória fechada é importante, e ela é denominada de “Força Eletromotriz – FEM”. Como a d.d.p. numa trajetória fechada é zero (já que o ponto inicial é igual ao ponto final), conseqüentemente, a FEM é igual à soma das tensões induzidas na trajetória fechada, com sinal trocado;

5) Utilizando as definições acima no caso de uma espira feita com fio condutor, com um “gap”, submetida à indução eletromagnética, teremos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\bar{A}(r, z, t) &= \frac{\mu_0 I(t)}{4\pi} \ln \left(\frac{(z+L) + \sqrt{r^2 + (z+L)^2}}{(z-L) + \sqrt{r^2 + (z-L)^2}} \right) \hat{a}_z \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln \left(\frac{\left((L+z) + \sqrt{r^2 + (L+z)^2} \right) \left((L-z) + \sqrt{r^2 + (L-z)^2} \right)}{r^2} \right) \hat{a}_z \\
&\approx \bar{A}(r, t) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \ln \left(\frac{2L}{r} \right) \hat{a}_z \Rightarrow \nabla \times \bar{A} = \bar{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{a}_\phi.
\end{aligned}$$

Vemos que, neste caso, tanto o potencial magnético como a densidade de fluxo magnético dependem unicamente da distância radial e, portanto, as linhas de campo magnético são circunferências com centro no condutor com corrente. O potencial magnético tem a mesma direção que a corrente que o produz, já a densidade de fluxo magnético é perpendicular a essa direção.

A tensão induzida ao longo de outro condutor retilíneo, colocado paralelo a este condutor com corrente a uma distância d , situado entre os pontos $z=a$ e $z=b$, será:

$$U_{ab}^{ext} = M_{12} \frac{dI_{ext}}{dt} = \left(\frac{\mu_0 (b-a)}{2\pi} \ln \left(\frac{2L}{d} \right) \right) \frac{dI_{ext}}{dt}.$$

Deve-se notar que a expressão resultante para a tensão induzida ao longo do condutor (ab) é idêntica à que se obteria no caso analisado no Anexo 2, com a restrição $d/2L \ll 1$, ao invés da restrição $L \gg z$ adotada neste anexo.

No caso de uma linha de transmissão bifilar, os efeitos na tensão induzida ao longo do condutor 3, da corrente de ida (no condutor 1) e da corrente de retorno (no condutor 2) se subtraem:

$$\begin{aligned}
\bar{A}(r, t) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left(\ln \left(\frac{2L}{r_{13}} \right) - \ln \left(\frac{2L}{r_{23}} \right) \right) \hat{a}_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right) \hat{a}_z \\
U_{ab(3)}^{ext} &= \frac{\mu_0}{2\pi} (b-a) \ln \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right) \frac{dI_{ext}}{dt} = (M_{13} - M_{23}) \frac{dI_{ext}}{dt} \\
\Rightarrow M &\equiv M_{13} - M_{23} = \frac{\mu_0 (b-a)}{2\pi} \ln \left(\frac{r_{23}}{r_{13}} \right).
\end{aligned}$$

Como a densidade de fluxo magnético, produzida por cada condutor com corrente, neste caso, é inversamente proporcional à distância radial; é então possível interpretar a indutância mútua obtida, em termos de enlaces de fluxo:

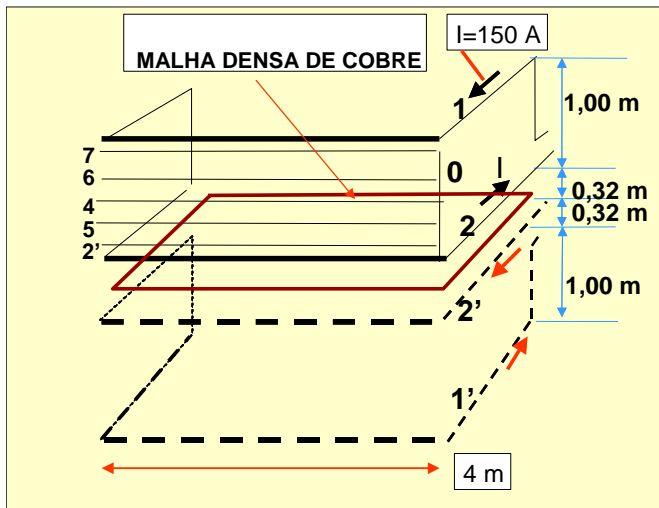


Figura 12 - O condutor e o retorno se refletem no plano da malha de terra densa.

Neste caso, é possível calcular o acréscimo de d.d.p. produzido pela corrente, utilizando a mesma fórmula mostrada no Anexo 3, já utilizada para calcular a d.d.p. que existiria se não houvesse malha.

Pode-se dizer que o acréscimo de tensão induzida aplicada ao longo de um condutor aberto é proporcional ao logaritmo natural da razão entre a distância da imagem do condutor (1) até o induzido (distancia D1), e a distância do condutor (2) até o induzido (D2). Ver Figura 13.

As figuras 13, 14, 15, 16 e 17 ilustram o cálculo do acréscimo de tensão induzida ao longo dos induzidos (2'-0), (5-0), (4-0), (6-0) e (7-0). Os valores assim calculados constam da quinta coluna da Tabela 4 deste artigo.

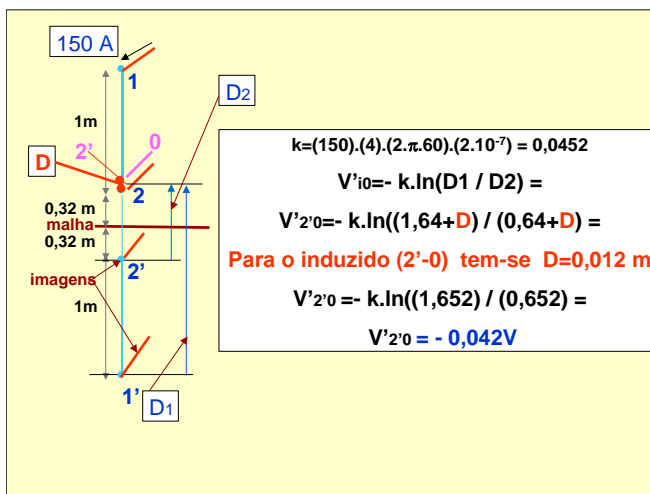


Figura 13 – Cálculo do acréscimo de tensão induzida causada pela malha de terra ao longo do induzido (2'-0).

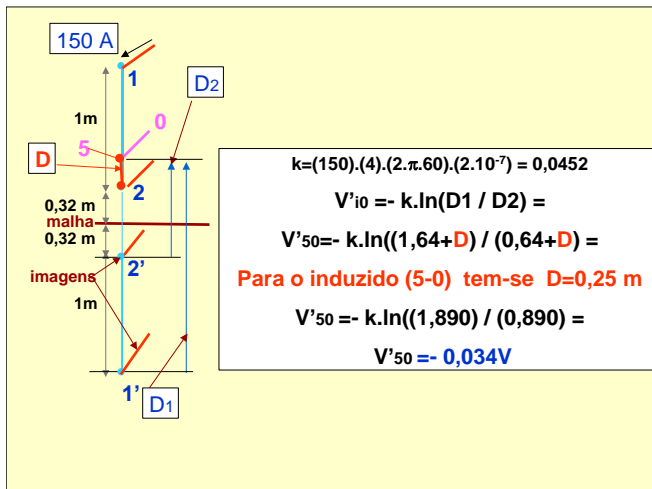


Figura 14 – Cálculo do acréscimo de tensão induzida causada pela malha de terra ao longo do induzido (5-0).

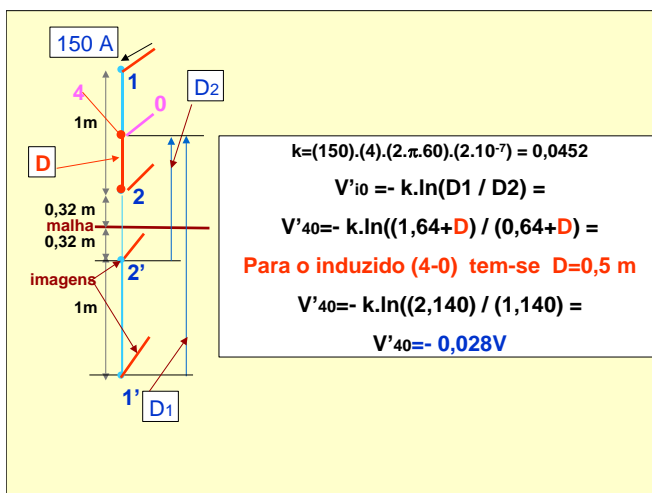


Figura 15 – Cálculo do acréscimo de tensão induzida causada pela malha de terra ao longo do induzido (4-0).

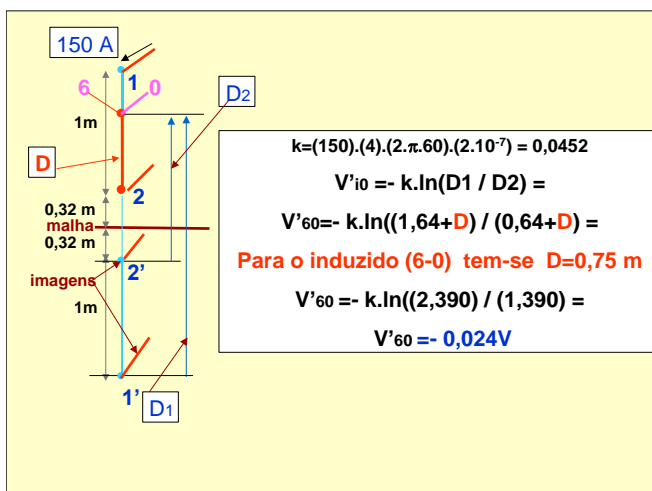


Figura 16 – Cálculo do acréscimo de tensão induzida causada pela malha de terra ao longo do induzido (6-0).

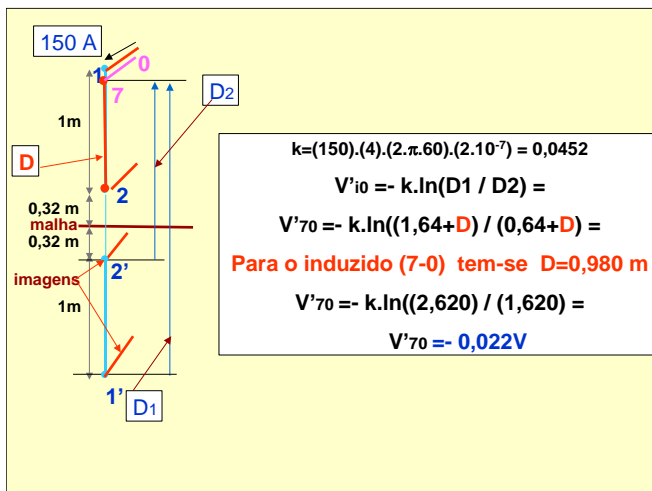


Figura 17 – Cálculo do acréscimo de tensão induzida causada pela malha de terra ao longo do induzido (7-0)